351. 函數方程式ニ就テ, VI

福原 滿洲雄 (北大)

函数方程式ヲ一般的ニ論ズルニハ、ドウシテモ *Fredholm* ノ積分方程式ノ理論ヲ完全ニ抽象化シテ置クコトガ重要デアル。

ソレガ已ニ滿足ナ程度ニ出來テ居ル（南雲氏，積分方程式ノ抽象的考察ニ就イテ，參照．本紙ヲ通ジテ種々未知ノ事柄ニツイテ教ヘラレル所ガ多イノハ仕合セデス）、併シソノ先ヘ進マウトスルニハ此レ等ノ結果ヲ自分ノ力デ整理シ，自分ノモノトシテカラデナイト，借リ物デハ自由ニ使ヒコナセナイ、ソレデ蛇足ノヤウデハアルガ一先ヅ今迄ノ結果ヲマトメテ置キタイト思フ。*Riesz* ノ論文（*Acta Math.* 1918）ト比較對照ノ便宜上ソノ定理番号ハ〔 〕ノ中ノ数字デ表ハスコトニシタ。

§1. 本論ニ入ル前ニコレカラ使フ記号ニツイテ述ベテ置ク.

E ハ完備シタ線狀D空間, $F(X)$ ハ E デ定義サレタ完全連續ナ（*vollstetig*）一次函数

(1) $\Phi(X) \equiv X - F(X) = 0$

ヲ滿足スル X ノ集合ヲ M,

(2) $\Phi(X) \equiv X - F(X) = x$

ガ解ヲ持ツ x ノ集合ヲ N, モット一般ニ

(3) $$\Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = 0$$

ヲ満足スルXノ集合ヲ M_n,

(4) $$\Phi^n(X) \equiv X - F_n(X) = x$$

ガ解ヲ持ツxノ集合ヲ N_n トスル. $\Phi^0(X)$, $\Phi^1(X)$ ハ夫々 X, $\Phi(X)$ ヲ表ハスモノトスレバ $M_1 = M$, $N_1 = N$, M_0 ハ 0 ダケカラ成ル集合, $N_0 = E$ デアル。

二ツノ集合 A, B ガアルトキ $A+B$ デ A ノ点ト B ノ点ノ和トシテ表ハサレル集合ヲ, λA (λハ実数) デ λ ト A ノ点ノ積トシテ表ハサレル集合ヲ, A, B ノ和集合, 積集合ハソレゾレ $A \cup B$, $A \cap B$ デ表ハスコトニスル. 又 B ガ一点 x ダケカラ成ル場合ニハ $A+B$ ノ代リニ $A(x)$ ト書ク. A ガ一次閉集合ナラバ $A(x)+A(y) = A(x+y)$, $\lambda A(x) = A(\lambda x)$ デ, 且ツ

$$\|A(x)\| = \underset{X \in A(x)}{\text{borne inf.}} \|X\|$$

ニ依ツテ $\|A(x)\|$ ヲ定義シタトキ $A(x)$ ノ全体ガ完備シタ線状D空間トナル、コレヲ E/A デ表ハシ商空間ト名ヅケル(功力氏, 抽象空間論, 197頁)

§2. 定理1〔1〕「Mハ有限ナ次元ヲ持ツ一次空間デアル」

Mガ閉ヂテヰルコトハ $F(X)$ ノ連続性ノ結果デアル、Mガ有限ナ次元ヲ持ツコトハ $M = F(M)$ デアルカラ *Riesz* ノ定理ノ結果デアル。

注意：　Mガ有限ナ次元ヲ持ツカラ $\|M(x)\|=\|X\|$ トナルヤウナ X ガ $M(x)$ ノ中ニ存在スル。

定理２〔5〕　「Nハ一次閉集合デアル」

$x_j\in N$, $x_j\to x$ ナラバ $\Phi(X_j)=x_j$, $\|X_j\|=\|M(X_j)\|$ $(=\rho_j)$ ナル X_j ガ存在スル．$\{X_j\}$ ガ有界ナラバ初メカラ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ $F(X_j)\to Y$ ト假定スルコトガ出來ル。

ソノ時 $X_j\to Y+x$ トナルカラ $X=Y+x$ ト置ケバ $\Phi(X)=x$ 即チ $x\in N$ ヲ得ル．$\{X_j\}$ ガ有界デナケレバ初メカラ適當ナ部分列ヲ取ルコトニヨリ $\rho_j\to\infty$ ト假定スルコトガ出來ル。

$X_j=\rho_j Y_j$ ト置ケバ $\|Y_j\|=\|M(Y_j)\|=1$ トナル．
$\{Y_j\}$ ハ有界デアルカラ $F(Y_j)\to Y$ ト假定シテヨイ。
$x_j/\rho_j\to 0$ デアルカラ $Y_j\to Y$ トナリ $\Phi(Y)=0$,
$\|M(Y)\|=1$ ヲ得ル、從ツテ $\Phi(X)=0$ ガMニ屬シナイ Y デ滿足サレルコトニナリ矛盾デアル。

定理３〔2〕　「$M_0\subset M_1\subset\cdots\cdots\subset M_\mu=M_{\mu+1}=\cdots\cdots$ トナルヤウナ μ ガ存在スル」

定理４〔6〕　「$N_0\supset N_1\supset\cdots\cdots\supset N_\nu=N_{\nu+1}=\cdots\cdots$ トナルヤウナ ν ガ存在スル」

例ヘバ定理３ハ次ノヤウニシテ證明サレル。

$M_n\subseteqq M_{n+1}$ デアルコト及ビ $M_{n-1}=M_n$ ナラバ $M_n=M_{n+1}$ トナルコトハ容易ニ分ル、ソコデ總テノ

nニ對シテ $M_n \subset M_{n+1}$ が成立スルト假定スル．M_{n+1} ノ中カラ $\| M_n(X_{n+1}) \| = 1$，$1 \leqq \| X_{n+1} \| \leqq 2$ ヲ滿足スル X_{n+1} ヲ取リ，$Y_n = F(X_n)$ ト置ク．$\{Y_n\}$ ハ緊ツテキル（compact）カラ收斂ナ部分列ヲ含ム、一方ニ於イテ $Y_{n+p} - Y_n = X_{n+p} - X$ $(p>0)$ ト置ケバ
$X = X_n + \Phi(X_{n+p}) - \Phi(X_n) \in M_{n+p-1}$ ヲ得ルカラ
$\| Y_{n+p} - Y_n \| \geqq 1$ トナリ $\{Y_n\}$ が收斂ナ部分列ヲ含ムコトハ出來ナイ、コレハ矛盾デアル。

定理5〔3〕「(2) が總テノ $\mathfrak{X}$ ニ對シテ解ヲ持テバ(1)ヲ滿足スル X ハ 0 ニ限ル」

定理6「(1)ヲ滿足スル X が 0 ニ限ルナラバ (2) ハ總テノ $\mathfrak{X}$ ニ對シテ解ヲ持ツ」

定理5ハ定理3カラ，定理6ハ定理4カラ導カレル。例ヘバ定理5ハ次ノヤウニシテ證明サレル。

(1) が 0 デナイ解 X_0 ヲ持ツト假定スル、一般ニ X_{n-1} が定義サレタトキ $\Phi(X) = X_{n-1}$ ヲ滿足スル X ノ一ツヲ X_n トスル．$\Phi^n(X_n) = X_0 \neq 0$，$\Phi^{n+1}(X_n) = \Phi(X_0) = 0$ デアルカラ M_{n+1} ハ M_n ニ屬シナイ点 X_n ヲ含ム．コレハ定理3ニ矛盾スル。

定理7「$n>0$ ナル時 $M_n \cap N_n$ が 0 デナイ点ヲ含メバ $M_n \subset M_{n+1}$，$N_n \supset N_{n+1}$ デアル」

定理8「$n>0$ ナル時 $M_n \cap N_n$ が 0 ダケヲ含ムナラバ $M_n = M_{n+1}$，$N_n = N_{n+1}$ デアル」

例ヘバ定理7ハ次ノヤウニシテ証明サレル。

$\text{亞}^n(N_n)=N_{2n}\subseteqq N_n$ デアルカラ (3), (4) ヲ N_n ニ於ケル方程式ト考ヘテヨイ。ソノトキ (4) ガ0デナイ X デ満足サレルカラ $N_{2n}\subset N_n$ 従ッテ $N_{n+1}\subset N_n$ ヲ得ル.
又 $M_n\cap N_n$ ニ属スル0デナイ点xヲ取レバ $\text{亞}^n(x)=0$ 且ツ $\text{亞}^n(X)=x$ ヲ満足スルXガ存在スル. $\text{亞}^{2n}(X)=\text{亞}^n(x)=0$ デアルカラXハM_{2n}ニ属シM_nニ属シナイ、即チ$M_n\subset M_{2n}$ 従ッテ $M_n\subset M_{n+1}$ ヲ得ル。

定理3—8カラ

定理9〔6〕.「$\mu=\nu$」

M_nガ有限ナ次元ヲ持ツカラ M_n+N_n モ一次閉集合デアル. $M_n\cap N_n$ ノ代リニ M_n+N_nヲ考ヘテモ定理9ニ達スル. 即チ定理7, 8 ヲ使ハズニ次ノ二定理ヲ得ル。

定理10. 「$n>0$ ナル時 $E\supset M_n+N_n$ ナラバ $M_n\subset M_{n+1}$, $N_n\supset N_{n+1}$ デアル」

定理11. 「$n>0$ ナル時 $E=M_n+N_n$ ナラバ $M_n=M_{n+1}$, $N_n=N_{n+1}$ デアル」

定理7, 8, 10, 11 ヲ纏メレバ

定理12. 「$n>0$ ナルトキ次ノ四條件ハ同等デアル。

$M_n=M_{n+1}$, $N_n=N_{n+1}$, $M_n\cap N_n=(0)$, $M_n+N_n=E$.」

$n=0$ ナラバ此ノ定理ノ後ノ二條件ハ常ニ満足サレテヰルカラ問題ニナラナイ。

定理13〔7〕「$M_0=M_1$ ト $N_0=N_1$ トハ同等デアル」

コレハ定理5,6ノ言ヒ換ヘニ過ギナイガ定理12ト比較ノ便宜上掲ゲタノデアル。

$$M_\mu \cap N_\mu = (0), \quad M_\mu + N_\mu = E$$

デアルカラ

定理14〔8〕「Eノ点ハM_μノ点トN_μノ点ノ和トシテ唯一通リニ表ハサレル」

一般ニ $\Phi(L)=L$ ヲ満足スル集合 L ヲ取ル. $N_n \supseteqq L$ ナラバ $N_{n+1}=\Phi(N_n)\supseteqq\Phi(L)=L$ ヲ得ル、$N_0=E\supseteqq L$ デアルカラ結局 $N_\mu\supseteqq L$ ヲ得ル.

定理15.「N_μハ$\Phi(L)=L$ヲ満足スル集合ノ最大ノモノデアル」